Nuove tecnologie e studio delle grandezze che variano

Domingo Paola
Liceo scientifico Issel, Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Abstract. *The fundamental ideas of Calculus, as change and accumulation of quantity, are very important tools for understanding science, applications, business and are essentials for informed citizenship. New technologies allow students to better understand the fundamental concepts of Calculus; in this paper I propose an example of the use of new technologies in order to study the mathematics of change.*

1. Premessa

Qualche anno fa James Kaput scrisse che siamo ormai all'alba di una nuova era nell'uso della tecnologia nella didattica della matematica: il cambiamento dei sistemi di rappresentazione e dei dispositivi fisici utilizzati per implementarli suggeriscono che nuovi alfabeti stiano emergendo e, con loro, interessanti possibilità di sperimentare diverse modalità di visualizzazione (Kaput, 2002). In questo lavoro vorrei descrivere un esempio di utilizzazione delle tecnologie informatiche oggi disponibili per lo studio di grandezze che variano. Gli aspetti interessanti sono essenzialmente due:

a) l'ambiente integrato che il software utilizzato[1] mette a disposizione degli studenti favorendo continue transizioni fra gli aspetti numerici, grafici e simbolici;
b) la possibilità di anticipare lo studio delle grandezze che variano prima di possedere tecniche di calcolo infinitesimale, consentendo così a tutti gli studenti di acquisire competenze particolarmente importanti per il cittadino di oggi.

Ritengo che l'esempio che presento in questo lavoro e altri simili che possono essere facilmente costruiti, possano aiutare a comprendere il senso delle parole di James Kaput sopra riportate.

2. Un esempio di problema

Il problema che discuto in questo lavoro fa parte della classe dei problemi di massimo e minimo, che è tradizione assegnare nella prassi didattica italiana

[1] Cabri géomètre II plus, della Texas Instruments.

soprattutto dopo che si sono introdotte le prime tecniche di calcolo infinitesimale, in particolare il calcolo delle derivate. La possibilità di lavorare in un ambiente come Cabri géomètre consente di affrontare questi problemi prima dell'introduzione del calcolo delle derivate e, anzi, li rende particolarmente adatti a preparare gli studenti alla comprensione dei concetti fondamentali del *Calculus* (Paola, 2005).

*Problema***.** È dato un cartone rettangolare ABCD con AB = $a \geq$ CB = b. A partire da ciascuno dei quattro vertici si ritaglino quattro quadrati uguali di lato x in modo da poter costruire una scatola a forma di parallelepipedo di altezza x. Studiare come varia, al variare di x il volume del parallelepipedo.

La possibilità di utilizzare Cabri géomètre conduce a occuparsi innanzitutto del problema della costruzione della situazione geometrica e, in particolare, dei limiti imposti a parametri e variabili. In questo caso, per esempio, la condizione AB $\geq$ CB è stata rispettata con i passi c) e d) della costruzione sotto riportata, mentre la condizione $0 \leq x \leq \dfrac{b}{2}$ è stata rispettata con i passi g), h) e i). La considerazione di questi aspetti, che può avvenire anche grazie all'aiuto dell'insegnante, non è secondaria, perché consente agli studenti di entrare maggiormente in sintonia con la situazione problematica.

Passi fondamentali della costruzione (vedere figura 1):

a) segmento AB e nomi ai suoi estremi;
b) perpendicolari p e p' per A e per B al segmento AB;
c) circonferenza di centro A e raggio AB e intersezione F tra tale circonferenza e p;
d) segmento AF e punto D su AF;
e) perpendicolare per D a p e intersezione C tra tale perpendicolare e p';
f) poligono (rettangolo) $ABCD$ e nascondere tutti gli oggetti tranne $ABCD$;
g) asse del lato AD del rettangolo e punti medi M e N dei lati AD e BC;
h) segmento CN, punto X sul segmento CN e segmento CX;
i) costruzione, sul segmento CX, del quadrato di lato CX;
j) asse del segmento DC e costruzione, mediante le simmetrie rispetto agli assi dei lati DC e AD, dei quadrati ai quattro vertici;
k) nascondere tutti gli oggetti tranne il rettangolo e i quadrati;
l) misure di CX, CB (dopo aver costruito il segmento CB) e AB;
m) mostra gli assi cartesiani e trasporto della lunghezza di CX sull'asse x;
n) calcolatrice per il calcolo del volume del parallelepipedo: $CX \cdot (CB - 2 \cdot CX) \cdot (AB - 2 \cdot CX)$;
o) trasporto del risultato (il volume) sull'asse y;
p) individuazione del punto L avente per ascissa la lunghezza di CX e per ordinata il volume V del parallelepipedo;
q) luogo di L al variare di X ed eventuale richiesta dell'equazione del luogo.

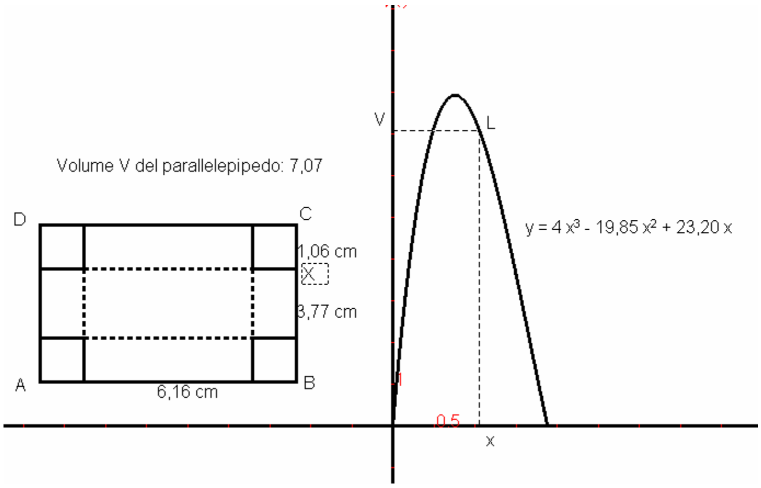

Figura 1

Prima ancora di fare disegnare il luogo di L al variare di X, potrebbe essere utile effettuare alcune esplorazioni a livello puramente numerico: per esempio, muovendo il punto X e osservando come varia il volume V del parallelepipedo, è possibile intuire e quindi congetturare che V ha un massimo. Un'esperienza ancora più significativa si può avere se si utilizza lo strumento "animazione" di Cabri. Infatti, animando il punto X, con l'accorgimento che il suo movimento non sia eccessivamente veloce, è possibile vedere che la velocità con cui varia il numero che rappresenta il volume del parallelepipedo al variare di X, tende a diventare massima quando X si trova in prossimità di C e del punto medio N di CB, mentre diminuisce fino a raggiungere un minimo quando X si muove da C verso N e da N verso C. In altri termini, per $0 \le x \le \frac{b}{2}$, il volume prima cresce e cresce sempre meno, poi decresce e decresce sempre più (in realtà, al variare dei valori dei parametri a e b, il grafico del volume può presentare anche un flesso nell'intervallo dato).

L'approccio grafico ha come obiettivo quello di confermare la congettura e di darle ancora maggiore consistenza. L'esigenza del passaggio al piano simbolico e formale può essere sentita solo grazie a un contratto didattico che evidenzi la necessità di non fermarsi al piano del convincimento empirico, ma che richieda sempre una giustificazione del *perché* i fenomeni si comportino proprio nel modo in cui sono stati osservati. Anche se è possibile chiedere direttamente a Cabri, con lo strumento "coordinate ed equazioni", l'espressione simbolica del volume $V(x)$, non è difficile, determinare manualmente tale espressione: $V(x) = 4x^3 - 2(a + b)\, x^2 + abx$. Può anche essere interessante discutere con gli studenti quali effetti hanno sul grafico di questa funzione le limitazioni geometriche del problema e confrontare questa espressione che contiene i parametri a e b con quella di Cabri, nella quale ad a e a b sono assegnate misure specifiche. Trattandosi di un polinomio di terzo grado, la dimostrazione che la funzione $V(x)$ ha un massimo e il suo calcolo, sono alla portata di studenti che sappiano determinare, data una funzione f, la derivata di tale funzione nel punto generico x, mediante il calcolo del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, nel quale, dopo aver effettuato le opportune semplificazioni per h, si fa tendere h a zero[2]. In questo caso, anche senza l'aiuto di un manipolatore simbolico, è alla portata degli studenti di un biennio, la determinazione della funzione derivata $V'(x) = 12x^2 - 4x(a+b) + ab$ e la determinazione dei suoi zeri.

3. Conclusione

Penso che questo esempio possa dare un'idea delle potenzialità delle risorse messe a disposizione dalle nuove tecnologie per lo studio delle grandezze che variano. Sicuramente la possibilità di continue e significative transizioni tra gli aspetti numerici, grafici e simbolici, prima ancora di possedere le tecniche raffinate del calcolo infinitesimale; inoltre, la possibilità di recuperare ragionamenti e approcci tipici delle origini del *Calculus* che costituiscono importanti risorse didattiche (per la loro prossimità con le radici cognitive dei concetti fondamentali del *Calculus*) e culturali (per la loro importanza nella storia del pensiero). L'unico motivo di sensata perplessità e preoccupazione nell'uso di strumenti così potenti deriva dall'eccessiva ricchezza di esplorazioni che consentono a costi molto limitati. Ciò potrebbe causare un'atrofia o, in ogni caso, un mancato sviluppo delle capacità di pensiero anticipatorio che, in ambiente carta e matita, vengono spesso attivate proprio per evitare una dispendiosa ricerca empirica su diversi casi. Relativamente a questo punto la ricerca didattica ha detto ancora poco, forse perché ha ancora molto da studiare.

Bibliografia

Kaput J.(2002). Implications of the Shift from Isolated, Expensive Technology to Connected, Inexpensive, Divers and Ubiquitous Technologies. (Fernando Hitt ed.) *Representations and Mathematics Visualization*. Mexico. 80 – 109.

Paola D.(2005). L'Insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano. *Progetto Alice*. V. VI, n. 16. 43 – 87.

---

[2] Una proposta didattica per l'introduzione di queste tecniche a livello di biennio di scuola secondaria si può trovare all'indirizzo web: http://www.matematica.it/paola/Corso%20di%20matematica.htm